Groupe C

MATHÉMATIQUES

Notations :

Nous désignons par E_n l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et par Σ_n le groupe des permutations de E_n.

On munit Σ_n de la probabilité uniforme $P_{(n)}$ (notée aussi P lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté), qui affecte chaque événement élémentaire de la probabilité $\frac{1}{n!}$.

I

Dans les deux premières questions, le nombre n est fixé. Nous l'omettons dans l'écriture de la probabilité.

PREMIÈRE QUESTION.

Nous désignons par $A_i(j)$ l'ensemble des permutations qui changent i en j, $(i, j \in E_n)$.

a. Calculer $P(A_i(j))$.

b. Soient $i_1, i_2, ..., i_k$ (resp $j_1, j_2, ..., j_k$) des éléments distincts de E_n.

Calculer $P\left(\bigcap_{u=1}^{k} A_{i_u}(j_u)\right)$.

Les événements $(A_{i_u}(j_u))_{u=1}^{k}$ sont-ils indépendants?

Tournez la page S. V. P.

DEUXIÈME QUESTION.

A toute permutation σ de Σ_n, on associe la suite $(y_1(\sigma), ..., y_n(\sigma))$ de ses rangs relatifs, définis de la manière suivante :

$y_1(\sigma) = 1$, $y_2(\sigma) = 2$ si $\sigma(2) > \sigma(1)$, $= 1$ si $\sigma(1) < \sigma(2)$

$y_k(\sigma)$ = rang de $\sigma(k)$ dans la suite réordonnée par ordre croissant $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(k))$.

On désigne par $B_k(r) = \{\sigma \in \Sigma_n ;\ y_k(\sigma) = r\}$, $r \leqslant k$.

a. Calculer $P(B_k(r))$.

b. Montrer que la suite $\hat{y}(\sigma) = (y_1(\sigma), y_2(\sigma), ..., y_n(\sigma))$ est un élément de $\Pi_n = \{1\} \times \{1, 2\} \times ... \times \{1, 2, ..., n\}$
et que l'application qui à σ associe $\hat{y}(\sigma)$ est une bijection de Σ_n sur Π_n.

c. On désigne par $(r_1, r_2, ..., r_n)$ un élément de Π_n.

Calculer $P\left(\bigcap_{u=1}^{n} B_u(r_u)\right)$.

En déduire $P\left(\bigcap_{u=1}^{k} B_u(r_u)\right)$.

d. Montrer que les v.a. y_i sont indépendantes, à valeurs dans E_i, et de loi uniforme, c'est-à-dire que

$$P(y_i = j) = \frac{1}{i} \quad \text{si} \quad j \leqslant i, \quad = 0 \text{ sinon.}$$

TROISIÈME QUESTION.

Nous rappelons la notation suivante :

Soit A une partie de Σ_n : 1_A désigne l'application de Σ_n dans $\{0, 1\}$ définie par

$$1_A(\sigma) = 1 \quad \text{si} \quad \sigma \in A, \quad = 0 \text{ si } \sigma \in A^c.$$

Nous notons $R_n(\sigma)$ le nombre de records de la permutation $\sigma \in \Sigma_n$, c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble $\{i;\ y_i(\sigma) = i\}$.

a. Montrer que $R_n(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} 1_{B_i(i)}(\sigma)$.

ENS ULM SEVRES 82

1 13 1

Calculer l'espérance et la variance de R_n, désignés respectivement par $E_{(n)}(R_n)$ et $\text{var}_{(n)}(R_n)$.

b. Montrer que, si n tend vers $+\infty$, $E_{(n)}(R_n)$ est équivalent à $\log n$. Donner un équivalent de $\text{var}_{(n)}(R_n)$.

c. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P_{(n)}\left(\left|\frac{R_n}{\text{Log } n} - 1\right| > \varepsilon\right)$ tend vers zéro si n tend vers $+\infty$.

d. Soit t un nombre réel de l'intervalle $[-1, 1]$.

Calculer $G_n(t) = E_{(n)}(t^{R_n})$.

$$\left[\text{Le résultat est que} \quad G_n(t) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}t + 1 - \frac{1}{i}\right)\right].$$

En déduire

$$P_{(n)}(R_n = 0), \quad P_{(n)}(R_n = 1) \quad \text{et} \quad P_{(n)}(R_n = 2).$$

QUATRIÈME QUESTION.

On considère deux entiers a et b, $a < b$. Sur le groupe Σ_{bn}, on définit une application T_n par $T_n(\sigma) = R_{bn}(\sigma) - R_{an}(\sigma)$.

a. Soit $\quad U_n(t) = \frac{G_{bn}(t)}{G_{an}(t)} \quad$ si $\quad t \in [-1, 1]$.

Utiliser un encadrement du logarithme pour montrer que la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\text{Log } |U_n(t)|$ est égale à $(t-1)\,\text{Log}\left(\frac{b}{a}\right)$.

b. Montrer que $U_n(t)$ est un polynôme de degré $(b-a)\,n$. Exprimer, à l'aide de la loi de T_n, le coefficient $\alpha_n(k)$ de t^k dans $U_n(t)$.

Montrer que quand n tend vers $+\infty$, la suite $\alpha_n(k)$ converge vers

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left[\text{Log}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^k \frac{1}{k!}.$$

II

Les notations sont les mêmes que dans la partie précédente.

PREMIÈRE QUESTION.

Dans cette question, s est une permutation fixée de Σ_n.

a. Montrer que $S = \{s^k;\ k \in \mathbf{Z}\}$ est un groupe de cardinal p fini (p s'appelle l'ordre de s).

b. Montrer que la relation définie dans E_n^2 par

aRb si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$; $b = s^k(a)$,

est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence, que nous désignons par $S(i)$, sont les cycles de s.

Montrer que s laisse ces classes invariantes, au sens où si $i \in S(b)$, $s(i) \in S(b)$.

En déduire que le cardinal de $S(b)$ divise p.

DEUXIÈME QUESTION.

On note $C_n(\sigma)$ le nombre de cycles de la permutation σ ($\sigma \in \Sigma_n$).

a. Décrire les permutations ayant n cycles et calculer le nombre de permutations ayant un cycle.

b. Montrer que, si $j \neq 1$ et $k \leqslant n-1$, il existe une bijection entre les ensembles

$$\{\sigma \in \Sigma_n\ ; \quad \sigma(1) = j\ , \quad C_n(\sigma) = k\}$$

et

$$\{\sigma \in \Sigma_{n-1}\ ; \quad C_{n-1}(\sigma) = k\}.$$

c. Montrer, de même, que :

$$\{\sigma \in \Sigma_n\ ; \quad \sigma(1) = 1\ , \quad C_n(\sigma) = k\}\ , \quad 2 \leqslant k \leqslant n-1$$

est isomorphe à un sous-ensemble de Σ_{n-1} que l'on précisera.

Tournez la page S. V. P.

- 74 -

TROISIÈME QUESTION.

On munit Σ_n de la probabilité uniforme, et on pose :

$$u_n(k) = P_{(n)}(\{\sigma;\ C_n(\sigma) = k\}) \ , \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

a. Montrer que

$$u_n(k) = \frac{n-1}{n}\, u_{n-1}(k) + \frac{1}{n}\, u_{n-1}(k-1) \quad \text{si} \quad n \geqslant 2 \quad \text{et} \quad 2 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Calculer $u_n(1)$ et $u_n(n)$.

b. Soit t un nombre réel de $[-1, +1]$.

On pose $H_n(t) = \sum_{k=1}^{n} t^k\, u_n(k)$.

Écrire une relation de récurrence satisfaite par $H_n(t)$.

Calculer $H_n(t)$ et comparer cette fonction à $G_n(t)$.

Que peut-on en conclure?

III

On considère n variables aléatoires indépendantes X_i, de même loi uniforme sur $[0, 1]$, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$. On suppose que pour tout ω les nombres $X_i(\omega)$ sont distincts.

Pour chaque ω, on définit une permutation aléatoire $T(\omega)$ de la manière suivante : $T(k, \omega)$ est égal au rang de $X_k(\omega)$ dans la suite $\{X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$ réordonnée de manière croissante.

PREMIÈRE QUESTION.

a. Quelle est l'interprétation de la suite des rangs relatifs

$$\hat{y}\big(T(\omega)\big) = \big(\ y_1\big(T(\omega)\big)\ ,\ \ldots,\ y_n\big(T(\omega)\big)\ \big)$$

et celle des records de $T(\omega)$?

b. Soit s un élément de Σ_n.

Calculer $P(\{\omega;\ \forall k \quad T(k, \omega) = s(k)\})$.

En déduire que les v.a. $(y_1(T), \ldots, y_n(T))$ sont indépendantes.

Suite ⟶

DEUXIÈME QUESTION.

On pose $M_k = \sup_{j<k} X_j$.

a. Calculer la fonction de répartition de la loi de M_k.

Calculer la loi du couple (M_k, X_{k+1}) si $k \leqslant n-1$.

b. On désigne par C_k l'événement : il existe un record à l'instant k, c'est-à-dire que $C_k = \{\omega;\ y_k\big(T(\omega)\big) = k\}$.

Exprimer C_k à l'aide des v.a. M_{k-1} et X_k.

Montrer que la probabilité pour qu'à l'instant k il y ait un record d'amplitude inférieure ou égale à t est égale à :

$$Q(C_k \cap \{X_k \leqslant t\}) = \frac{t^k}{k}.$$

c. Calculer $\beta_n = \sum_{k=1}^{n} Q(C_k \cap \{X_k \leqslant t\})$, c'est-à-dire le nombre moyen des valeurs records plus petites que t.

Quelle est sa limite si n tend vers $+\infty$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail